数理解析研究所講究録 1314 巻 2003 年 28-36

INTERPOLATION IN PSEUDOCONVEX DOMAINS

国際基督教大・教養　大内重樹 (Shigeki OH'UCHI)
The liberal arts, International Chiristian University

本稿の目的は, 今まで考えてきた $\mathbb{C}^n$ 上の Hörmander 環 $A_p(\mathbb{C}^n)$ における補間問題の $\mathbb{C}^n$ の特殊性を認識するために, 擬凸開集合 Ω 上の Hörmander 環 $A_p(\Omega)$ における補間問題について述べ, 論文 [O4] の内容を解説することである.

1. Introduction

f を擬凸開集合 Ω 上の正則関数とし, $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を Ω 内の離散点列とする. このとき, 各 z_k 上で

$$f(z)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{\partial^\alpha f(z_k)}{\alpha!}\cdot(z-z_k)^\alpha$$

と Taylor 展開される. (ここで, 多重添字の記法を用いている. また, その他の記号, 用語は §2 で定義される.) また, $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を自然数列とする. このとき, 任意のある増大条件 (§2 で定義される) をみたす $(n+1)$-重複素数列 $\{a_{k,\alpha}\}_{k\in\mathbb{N},|\alpha|\le m_k-1}$ に対し,

$$\frac{\partial^\alpha f(z_k)}{\alpha!}=a_{k,\alpha}\qquad(\forall k\in\mathbb{N},\ \ |\alpha|\le m_k-1)\tag{1.1}$$

をみたす Ω 上の正則関数 $f\in A_p(\Omega)$ 存在するとき, $V:=\{(z_k,m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を Hörmander 環 $A_p(\Omega)$ に関する (θ-) 補間的な重複度多様体とよぶことにする. ここで, 条件 (1.1) は f が各 z_k で (有限個の) 与えられた Taylor 係数をもつことを意味している. 特に, $m_k=1$ ($\forall k\in\mathbb{N}$) のとき, (1.1) は単に各 z_k で与えられた値をもつことを意味している. 本稿では, 与えられた重複度多様体 V が $A_p(\Omega)$ に関して (θ-) 補間的であるための (V についての) 必要十分条件をみつける問題 (補間問題) について議論する. 同じような Hörmander 環における補間問題は多くの人に研究されており, 調和解析やシステム理論などに応用されている. (cf., [BCL], [BG2], [BL1], [BL2], [BT1], [BT2], [BT3], [HM], [L], [LT], [LV1], [LV2], [O1], [O2], [O3], [Ou], [S1], [S2], etc.)

1 変数の場合, $\Omega = \mathbb{C}$ のとき, 解析的な必要十分条件 (i.e., V を定義する関数による条件) が Berenstein と Taylor ([BT1]) により与えられている. さらに, ウエイト p が位数有限で radial (i.e., p が $|z|$ のみの関数で表される) である場合に幾何的な必要十分条件 (i.e., V そのものの幾何的な性質による条件) が Berenstein と Li ([BL2]) により与えられている. (その条件は, Nevanlinna の個数関数により記述されている.) 多変数の場合, $\Omega = \mathbb{C}^n$ で $m_k = 1$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ のとき, 解析的条件が Berenstein と Li ([BL1]) により与えられている. (また, [O2] では, $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関して補間的な離散点列 V が $n+1$ 個の $A_p(\mathbb{C}^n)$ 関数の共通零点集合でかけることを証明した.) また, Ω が $\mathbb{C}^n$ または $\mathbb{C}^n$ 上の単位球 $B_n(0,1)$ のときには, 次のように Li と Villamor ([LV1], [LV2]) により次のような解析的な必要十分条件が与えられている.

Theorem A. ([LV1]) p を $\mathbb{C}^n$ 上のウエイトとし, $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{C}^n$ 上の重複度多様体とする. このとき, V が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関して補間的であるための必要十分条件は, N $(\geq n)$ 個の関数 $f_1, \dots, f_N \in A_p(\mathbb{C}^n)$ と正定数 ε, C が存在して,

(1) 重複度多様体として, $V \subset V(f)$.
(2) S を $S_p(f; \varepsilon, C)$ の任意の連結成分とするとき, S は $\{z_k\}$ の点を高々 1 つ含み, もし S が z_k を含んでいるならば, S の直径は 1 以下である.

をみたすことである.

Theorem B. ([LV2]) $\lambda \in (0, 1/n)$ を固定する. $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{C}^n$ 上の単位球 $B_n(0,1)$ 内の重複度多様体とする. このとき, V が $A^{-\infty}$ に関して補間的であるための必要十分条件は, N $(\geq n)$ 個の関数 $f_1, \dots, f_N \in A^{-\infty}$ と正定数 ε, C が存在して,

(1) 重複度多様体として, $V \subset V(f)$.
(2) S を $S_p(f; \varepsilon, C)$ の任意の連結成分とするとき, S は $\{z_k\}$ の点を高々 1 つ含み, もし S が z_k を含んでいるならば, S の直径は $\lambda(1 - |z_k|)$ 以下である.

をみたすことである.

ここで §2 の記法を用いると, $A^{-\infty} = A_p(B_n(0,1))$, $p(z) = -\log(1 - |z|)$ である. 我々は, Theorem A や Theorem B を Ω が $\mathbb{C}^n$ の擬凸開集合の場合に拡張した.

Main Theorem. $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を $\rho_V(A_p(\Omega)) \subset l_{p,\theta}(V)$ をみたす重複度多様体とする. このとき, V が $A_p(\Omega)$ に関し θ-補間的 (つまり, $\rho_V(A_p(\Omega)) = l_{p,\theta}(V)$) であるための必要十分条件は, $f_1, \dots, f_N \in A_p(\Omega)$ と正定数 ε, C が存在して

(1) 重複度多様体として $V \subset V(f)$.
(2) S を $S_p(f; \varepsilon, C)$ の任意の連結成分とするとき, S は $\{z_k\}$ の点を高々 1 つ含み, もし S が z_k を含んでいるならば, S の直径は $\theta \exp(-K_1 p(z_k) - K_2)$ 以下である.

をみたすことである. また, 重複度多様体 $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ が $\rho_V(A_p(\Omega)) \subset l_{p,\theta}(V)$ をみたしていなかったとしても, 上の条件は V が $A_p(\Omega)$ に関し θ-補間的 (つまり, $\rho_V(A_p(\Omega)) \supset l_{p,\theta}(V)$) であるための十分条件である.

2. Preliminaries

$\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく．また，$z \in \mathbb{C}^k$, $r > 0$ に対し，$B_k(z,r) := \{w \in \mathbb{C}^k : |w - z| < r\}$ を z 中心，半径 r の $\mathbb{C}^k$ 内の球とする．

Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の擬凸開集合とし，p を Hörmander の意味のウエイト，つまり，

(HW1) $\log(1+|z|^2) = O(p(z))$. (Ω が非有界で，$|z| \to \infty$, $z \in \Omega$ のとき)
(HW2) $z \in \Omega$, $|z - \zeta| \le \exp(-K_1 p(z) - K_2)$ のとき，$\zeta \in \Omega$, $p(\zeta) \le K_3 p(z) + K_4$ となる正定数 K_1, K_2, K_3, K_4 が存在する．

を満たす非負値多重劣調和関数とする．(以降，Hörmander の意味のウエイト p が与えられたときには，(HW2) 内の正定数は固定されたものとする.) $\Omega = \mathbb{C}^n$ のとき，p が Berenstein と Taylor の意味のウエイト (cf., e.g. [BT1]) であるならば，p は Hörmander の意味のウエイトでもあることに注意する．$d_\Omega(z) := \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |\zeta - z|$ とおくとき，$p(z) = |z|^2 - \log d_\Omega(z) + C$ (C は十分大きな正定数) が Hörmander の意味のウエイトの例の一つである．(cf., [Ho2])

Definition 2.1. このとき，$A_p(\Omega)$ を正定数 A, B をもって

$$f(z) \le A \exp(Bp(z)) \qquad (\forall z \in \Omega)$$

をみたす Ω 上の正則関数 f のなす空間とする．このとき，$A_p(\Omega)$ は環の構造をもち，**Hörmander algebra** と呼ばれる．

この名称は，Hörmander が $A_p(\Omega)$ 上の割算問題についてはじめて議論したことに由来する (cf., [Ho1])．次の補題は，(HW1) と (HW2) から導かれる．(証明は，[Ho1] を参照せよ.)

Lemma 2.2. p を Ω 上の Hörmander の意味のウエイトとする．このとき，以下が成立する．

(1) $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] \subset A_p(\Omega)$.
(2) $f \in A_p(\Omega)$, $\alpha \in Z_+^n$ のとき，$\partial^\alpha f \in A_p(\Omega)$.
(3) f を Ω 上の正則関数とするとき，$f \in A_p(\Omega)$ であるための必要十分条件は，

$$\int_\Omega |f|^2 \exp(-Lp)\, d\lambda < +\infty$$

となる正定数 L が存在することである．ただし，$d\lambda$ は Ω 上の Lebesgue 測度である．

$\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を Ω 内の離散点列とし，$\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を自然数列とする．このとき，z_k, m_k を組にした列 $\{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ をΩ 上の**重複度多様体**とよび，m_k を z_k での**重複度**とよぶ．$V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $W = \{(w_l, n_l)\}_{l\in\mathbb{N}}$ を 2 つの重複度多様体とするとき，重複度多様体として $V \subset W$ であることを，$z_k = w_{\iota(k)}$, $m_k \le n_{\iota(k)}$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) をみたす単射 $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在することで定義する．

$f_1, \ldots, f_N \in \mathcal{O}(\Omega)$ (Ω 上の正則関数全体のなす環) に対し, $f_1, \ldots, f_N$ の共通零点集合 $Z(f)$ を 0 次元の成分 $\{z_k\}_k$ と正次元の成分 $\{Y_\nu\}_\nu$ に分ける. また, m_k として f_j $(j = 1, \ldots, N)$ たちの z_k における零点の位数の最小値とする. このとき, $f_1, \ldots, f_N$ から定義される Ω 上の重複度多様体 $V(f)$ を $\{(z_k, m_k)\}_k$ によって定義する.

$V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を Ω 上の重複度多様体とする. このとき, $I(V)$ で任意の $k \in \mathbb{N}$ と $|\alpha| \le m_k - 1$ となる多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し $\partial^\alpha f(z_k) = 0$ となる Ω 上の正則関数のなす $\mathcal{O}(\Omega)$ 内のイデアルとする. このとき, $\mathcal{O}(V) := \mathcal{O}(\Omega)/I(V)$ の元を V 上の解析関数という. V 上の解析関数は $(n+1)$ 重複素数列 $\{a_{k,\alpha}\}_{k\in\mathbb{N},|\alpha|\le m_k-1}$ と同一視される. また, $A_p(V)$ を, 正定数 A, B が存在して

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m_k-1} |a_{k,\alpha}| \le A\exp(Bp(z_k)) \qquad (\forall k \in \mathbb{N})$$

をみたす $\{a_{k,\alpha}\}_{k\in\mathbb{N},|\alpha|\le m_k-1} \in \mathcal{O}(V)$ のなす空間とする.

ここで, 各 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ を $\{\partial^\alpha f(z_k)/\alpha!\}_{k\in\mathbb{N},|\alpha|\le m_k-1} \in \mathcal{O}(V)$ にうつす写像を ρ_V と定義すると, $\rho_V(\mathcal{O}(\Omega)) = \mathcal{O}(V)$. 今まで考えてきた $\Omega = \mathbb{C}^n$ で p が $\mathbb{C}^n$ 上のウエイトである場合には, $\rho_V(A_p(\mathbb{C}^n)) \subset A_p(V)$ であるが, Ω が $\mathbb{C}^n$ でない擬凸開集合, p が Hörmander の意味のウエイトである場合には, 以下の例で示されるように, $\rho_V(A_p(\Omega)) \subset A_p(V)$ は成立しない. $A_p(V)$ は補間される関数空間にとって小さすぎるのである.

Example 2.3. (cf., [LV2]) $\Omega = B_1(0,1)$, $p(z) = -\log d_\Omega(z) = -\log(1-|z|)$, $f(z) = (1-z)^{-1} \in A_p(\Omega)$ とおく. ここで, $z_k = 1 - k^{-1} \in \Omega$, $m_k = 2^k$ によって定義される重複度多様体 $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対し, $(\alpha!)^{-1}\partial^\alpha f(z_k) = k^{\alpha+1}$ となる. 従って, 任意の $C > 0$ に対し,

$$\begin{aligned}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\exp(-Cp(z_k))\sum_{\alpha=0}^{m_k-1}\left|\frac{\partial^\alpha f(z_k)}{\alpha!}\right|\right) &= \sup_{k\in\mathbb{N}}\left((1-|z_k|)^C\sum_{\alpha=0}^{2^k-1}k^{\alpha+1}\right)\\ &\ge \sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k^C}\sum_{\alpha=0}^{2^k-1}1 = \sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{2^k}{k^C} = +\infty.\end{aligned}$$

このことは, $\rho_V(f) \notin A_p(V)$ を示している.

さらに, $\Omega \neq \mathbb{C}^n$ のとき $\rho_V(A_p(\Omega)) \not\subset A_p(V)$ となるより強い理由は, $d_\Omega(z) < 1$ となる $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Omega$ における $f \in A_p(\Omega)$ の Taylor 展開式が多重円板 $B_1(z_1, 1) \times \cdots \times B_1(z_n, 1)$ において収束しないことである. そこで, $A_p(V)$ のかわりに以下のように定義される $\theta \in (0,1]$ に対する $l_{p,\theta}(V)$ を考える.

Definition 2.4. $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を Ω 上の重複度多様体とする. このとき, $l_{p,\theta}(V)$ を, 正定数 $C > 0$ が存在して

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m_k-1} |a_{k,\alpha}| \theta^{|\alpha|} \exp(-|\alpha|(K_1 p(z_k) + K_2)) \right) < +\infty$$

をみたす $\{a_{k,\alpha}\}_{k\in\mathbb{N},|\alpha|\le m_k-1} \in \mathcal{O}(V)$ のなす空間とする.

Proposition 2.5. $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を Ω 上の重複度多様体とする. このとき,

(1) $\theta \in (0, 1/\sqrt{n})$ ならば, $\rho_V(A_p(\Omega)) \subset l_{p,\theta}(V)$ が成立する.
(2) $n \ge 2$, $\theta \in [1/\sqrt{n}, 1]$, $m_k = O(p(z_k))$ ならば, $\rho_V(A_p(\Omega)) \subset l_{p,\theta}(V)$ が成立する.
(3) $n = \theta = 1$, $m_k = O(\exp(Dp(z_k)))$ $(\exists D > 0)$ ならば, $\rho_V(A_p(\Omega)) \subset l_{p,\theta}(V)$ が成立する.

Remark. Proposition 2.5 (2), (3) における重複度 m_k についての仮定は意味あるものである. というのは, $\rho_V(A_p(\Omega)) = l_{p,\theta}(V)$ であることからそれと同等かより強い重複度についての評価が得られるからである. (cf., Lemma 3.1 (1).)

Definition 2.6. 重複度多様体 V は, (たとえ, $\rho_V(A_p(\Omega)) \subset l_{p,\theta}(V)$ でなかったとしても) $\rho_V(A_p(\Omega)) \supset l_{p,\theta}(V)$ のとき, $A_p(\Omega)$ に関して θ-**補間的**であるという.

$V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を Ω 上の重複度多様体とする. このとき, V が $A_p(\Omega)$ に関し θ-補間的で $\theta' \ge \theta$ ならば, 明らかに V は $A_p(\Omega)$ に関し θ'-補間的である. また, $\theta_0(V) := \sup\{\theta \in (0,1] : \rho_V(A_p(\Omega)) \subset l_{p,\theta}(V)\}$ $(\ge 1/\sqrt{n})$ とおくとき, ある $\theta \in (0, \theta_0(V))$ に対し $\rho_V(A_p(\Omega)) = l_{p,\theta}(V)$ が成立するならば, 任意の $\theta' \in (\theta, \theta_0(V))$ に対し同様の等式 $\rho_V(A_p(\Omega)) = l_{p,\theta'}(V)$ が成立する.

$f_1, \ldots, f_N \in A_p(\Omega)$, ε, $C > 0$ に対し, 共通零点集合 $Z(f) = Z(f_1, \ldots, f_N)$ の「管状近傍」と考えられる集合

$$S_p(f; \varepsilon, C) := \left\{ z \in \Omega : |f(z)| := \left(\sum_{j=1}^{N} |f_j(z)|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon \exp(-Cp(z)) \right\}$$

を定義する.

3. Proof of Main Theorem

詳しい証明については, [O4] を参照せよ. ここでは, まずその必要性の証明中に導かれるもので, またそれ自体が重要である結果を紹介する.

Lemma 3.1. $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を $\rho_V(A_p(\Omega)) = l_{p,\theta'}(V)$ が成立する Ω 上の重複度多様体とする．このとき，

(1) 正定数 A_0, B_0 が存在し，

$$m_k \le A_0 p(z_k) + B_0 \qquad (\forall k \in \mathbb{N})$$

が成立する．

(2) 正定数 ε_0, C_0 が存在し，

$$\inf_{l\neq k} |z_l - z_k| \ge \varepsilon_0 \exp(-C_0 p(z_k)) \qquad (\forall k \in \mathbb{N})$$

が成立する．

(3) 十分大きい $M > 0$ に対し

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-Mp(z_k)) < +\infty$$

が成立する．

また，十分性の証明では，擬凸開集合 Ω に対しても $\mathbb{C}^n$ のときのように次のような Semilocal Interpolation Theorem が成立することが重要になる．

Semilocal Interpolation Theorem for pseudoconvex open sets. Ω を $\mathbb{C}^n$ 上の擬凸開集合，p を Ω 上の Hörmander の意味のウエイトとし，$f = (f_1, \dots, f_N) \in A_p(\Omega)$ $(N \in \mathbb{N})$ とする．h を $S_p(f; \varepsilon_0, C_0)$ 上の正則関数で，

$$|h(z)| \le A_0 \exp(B_0 p(z)) \qquad (\forall z \in S_p(f; \varepsilon_0, C_0))$$

をみたすと仮定する．(A_0, B_0, C_0, $\varepsilon_0 > 0$) このとき，Ω 上の正則関数 $H \in A_p(\Omega)$ と正定数 $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$, $C_1 > C_0$, A_1, B_1 と m 個の $S_p(f; \varepsilon_1, C_1)$ $(\subset S_p(f; \varepsilon_0, C_0))$ 上の正則関数 $g_1, \dots, g_m$ が存在して

(1) $H(z) - h(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_j(z) f_j(z)$

(2) $|g_j(z)| \le A_1 \exp(B_1 p(z))$ $(\forall j = 1, \dots, m)$

が任意の $z \in S_p(f; \varepsilon_1, C_1)$ に対して成立する．特に，共通零点集合 $Z(f)$ 上で $H \equiv h$ が成立し，$V(f) = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ならば，

$$\frac{\partial^\alpha H(z_k)}{\alpha!} = \frac{\partial^\alpha h(z_k)}{\alpha!} \qquad (\forall k \in \mathbb{N},\ |\alpha| \le m_k - 1)$$

が成立する．

4. Corollaries of Main Theorem

Main Theorem の系として, Berenstein と Taylor ([BT3]) により提出された補間に関する未解決問題を擬凸開集合 Ω 上の (離散点列からなる) 重複度多様体 V の場合に肯定的な解が与えられることがわかる.

Corollary 4.1. p を固定した定数が K_1, K_2, K_3, K_4 である Ω 上の Hörmander の意味のウエイトとする. V を $\rho_V(A_p(\Omega)) \subset l_{p,\theta}(V)$ ($\theta \in (0,1]$ は固定する) をみたす Ω 上の重複度多様体とする. また, V が $A_p(\Omega)$ に関し θ-補間的であると仮定する. このとき, q が固定した定数を L_1, L_2, L_3, L_4 である Ω 上の Hörmander の意味のウエイトで $K_1p(z)+K_2 \le L_1q(z)+L_2$ ($\forall z \in \Omega$) をみたしているならば, V は $A_q(\Omega)$ に関しても θ-補間的である.

さらに, 以下の系を得る.

Corollary 4.2. $\{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を $A_p(\Omega)$ に関し θ-補間的である重複度多様体とする. このとき, $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を有界な自然数列とするとき, $\{(z_k, b_km_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ も $A_p(\Omega)$ に関し θ-補間的である.

Corollary 4.3. $\Omega_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$ $(j=1,\dots,m)$ を擬凸開集合とし, p_j を Ω_j 上の Hörmander の意味のウエイトとする. $n := n_1+\cdots+n_m$, $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m \subset \mathbb{C}^n$ とおくとき, Ω 上の Hörmander の意味のウエイト p を $p(z_1,\dots,z_n) = p_1(z_1,\dots,z_{n_1}) + p_2(z_{n_1+1},\dots,z_{n_1+n_2}) + \cdots + p_m(z_{n-n_m+1},\dots,z_n)$ と定義する. このとき, $\rho_V(A_p(\Omega)) \subset l_{p,\theta}(V)$ をみたす Ω 上の重複度多様体 $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ が $A_p(\Omega)$ に関し θ-補間的であるための必要十分条件は, $z_k = (z_{k,1},\dots,z_{k,n})$, $z_k^{(j)} = (z_{k,n_1+\cdots+n_{j-1}+1},\dots,z_{k,n_1+\cdots+n_j})$ とおくとき, 各 $\{(z_k^{(j)}, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ が $A_{p_j}(\Omega_j)$ に関し θ-補間的であることである.

さらに, Lemma 3.1 の系として, Proposition 2.5 から次のことがわかる.

Corollary 4.4. V をある $\theta \in (0,1]$ に対し $\rho_V(A_p(\Omega)) = l_{p,\theta}(V)$ をみたす Ω 上の重複度多様体とする. このとき, 任意の $\theta' \in (\theta, 1]$ に対し同様の等式 $\rho_V(A_p(\Omega)) = l_{p,\theta'}(V)$ が成立する.

Remark. この結果は, §2 での結果を改良したものである. (そこでは, $\theta < \theta_0(V)$ であるとき, 任意の $\theta' \in (\theta, \theta_0(V))$ に対し $\rho_V(A_p(\Omega)) = l_{p,\theta'}(V)$ であることしかわからなかった.)

$m_k = 1$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) の場合には, 任意の $\theta \in (0,1]$ に対し $A_p(V) = l_{p,\theta}(V)$ である. 従って, Main Theorem における補間条件は次のように与えることができる. (cf., [BL1])

Corollary 4.5. Ω を $\mathbb{C}^n$ 上の擬凸開集合とし, p を Ω 上の Hörmander の意味のウエイトとする. このとき, Ω 内の離散点列 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対し, 以下は同値である.

(1) V は $A_p(\Omega)$ に関し (θ)-補間的である.

(2) N $(\geq n)$ 個の関数 $f_1, \ldots, f_N \in A_p(\Omega)$ と正定数 ε, C が存在し, $V \subset V(f)$ と

$$\sum_{\kappa=1}^{\binom{N}{n}} |\triangle_\kappa^f(z_k)| \geq \varepsilon \exp(-Cp(z_k)) \qquad (\forall k \in \mathbb{N})$$

が成立する. ここで, 上の和は $f = (f_1, \ldots, f_N)$ の Jacobi 行列の全ての $n \times n$ 小行列式についてとったものである.

(3) m $(\geq n)$ 個の関数 $f_1, \ldots, f_m \in A_p(\Omega)$ と正定数 ε, C が存在し, $V \subset V(f)$ と

$$\sum_{j=1}^{N} |D_u f_j(z_k)| \geq \varepsilon \exp(-Cp(z_k)) \qquad (\forall k \in \mathbb{N},\ \forall u \in S^{2n-1})$$

が成立する. ここで, $S^{2n-1} := \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ であり,

$$D_u f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} \cdot u_j$$

は f のベクトル $u = (u_1, \ldots, u_n) \in S^{2n-1}$ に沿った方向微分である.

最後に, [O2] のように Main Theorem の条件 (1) が等号で成立するためにはいくつの $A_p(\Omega)$ 関数が必要かという問題を考える. この問題の解答は次の定理で与えられる.

Theorem 4.6. $V = \{(z_k, m_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ を $\rho_V(A_p(\Omega)) \subset l_{p,\theta}(V)$ をみたす重複度多様体とする. このとき, V が $A_p(\Omega)$ に関し θ-補間的 (つまり, $\rho_V(A_p(\Omega)) = l_{p,\theta}(V)$) であるための必要十分条件は, $f_1, \ldots, f_N \in A_p(\Omega)$ と正定数 ε, C が存在して

(1) 共通零点集合 $Z(f)$ は正次元の成分を含まず, 重複度多様体として $V = V(f)$ が成立する.

(2) S を $S_p(f; \varepsilon, C)$ の任意の連結成分とするとき, S は $\{z_k\}$ の点を高々 1 つ含み, もし S が z_k を含んでいるならば, S の直径は $\theta \exp(-K_1 p(z_k) - K_2)$ 以下である.

をみたすことである.

References

[BCL] C. A. Berenstein, D-C. Chang and B. Q. Li, *Interpolating varieties and counting functions in $\mathbb{C}^n$*, Michigan Math. J. **42** (1995), 419–434.

[BG1] C. A. Berenstein and R. Gay, *Complex Variables: An Introduction*, Graduate Text in Math. 125, Springer-Verlag, New York, 1991.

[BG2] ———, *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[BL1] C. A. Berenstein and B. Q. Li, *Interpolating varieties for weighted spaces of entire functions in $\mathbb{C}^n$*, Publications Matemàtiques **38** (1994), 157–173.

[BL2] ———, *Interpolating varieties for spaces of meromorphic functions*, J. Geom. Anal. **5** (1995), 1–48.

[BT1] C. A. Berenstein and B. A. Taylor, *A new look at interpolation theory for entire functions of one variable*, Adv. in Math. **33** (1979), 109–143.

[BT2] ———, *Interpolation problem in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic analysis*, J. Analyse Math. **38** (1981), 188–254.

[BT3] ———, *On the geometry of interpolating varieties*, Seminaire Lelong-Skoda (1980/1981), Lecture Notes in Math. 919 (P. Lelong and H. Skoda, eds.), Springer, New York, 1983, pp. 1–25.

[G] R. Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables* Volume I: Function Theory, Wadsworth, Inc., California, 1990.

[HM] A. Hartsmann and X. Massaneda, *On interpolating varieties for weighted spaces of entire functions*, J. Geom. Anal. **10** (2000), 683–696.

[Ho1] L. Hörmander, *Generators for some rings analytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 943–949.

[Ho2] ———, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, 3rd edition, North-Holland Mathematical Library, volume 7, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[L] B. Q. Li, *On the Bézout problem and area of interpolating varieties in $\mathbb{C}^n$, II*, Amer. J. Math. **120** (1998), 1191–1198.

[LT] B. Q. Li and B. A. Taylor, *On the Bézout problem and area of interpolating varieties in $\mathbb{C}^n$*, Amer. J. Math. **118** (1996), 989–1010.

[LV1] B. Q. Li and E. Villamor, *Interpolating multiplicity varities in $\mathbb{C}^n$*, J. Geom. Anal. **11** (2001), 91–101.

[LV2] ———, *Interpolation in the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, Israel J. Math. **123** (2001), 341–358.

[M] X. Massaneda, *$A^{-\infty}$-interpolation in the ball*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2) **41** (1998), 359–367.

[O1] S. Oh'uchi, *Disjoint unions of complex affine subspaces interpolating for A_p*, Forum Math. **11** (1999), 369–384.

[O2] ———, *The number of functions defining interpolating varieties*, Kodai Math. J. **24** (2001), 66–75.

[O3] ———, *Interpolation on countably many algebraic subsets for weighted entire functions*, Osaka J. Math. **39** (2002), 1–25.

[O4] ———, *Weighted interpolation in pseudoconvex domains*, preprint, 2002.

[Ou] M. Ounaies, *Interpolating discrete varieties for spaces of entire functions with growth conditions*, preprint, 1998.

[S1] W. A. Squires, *Necessary conditions for universal interpolation in $\hat{\mathcal{E}}'$*, Can. J. Math. **3** (1981), 1356–1384.

[S2] ———, *Geometric conditions for universal interpolation in $\hat{\mathcal{E}}'$*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 401–413.